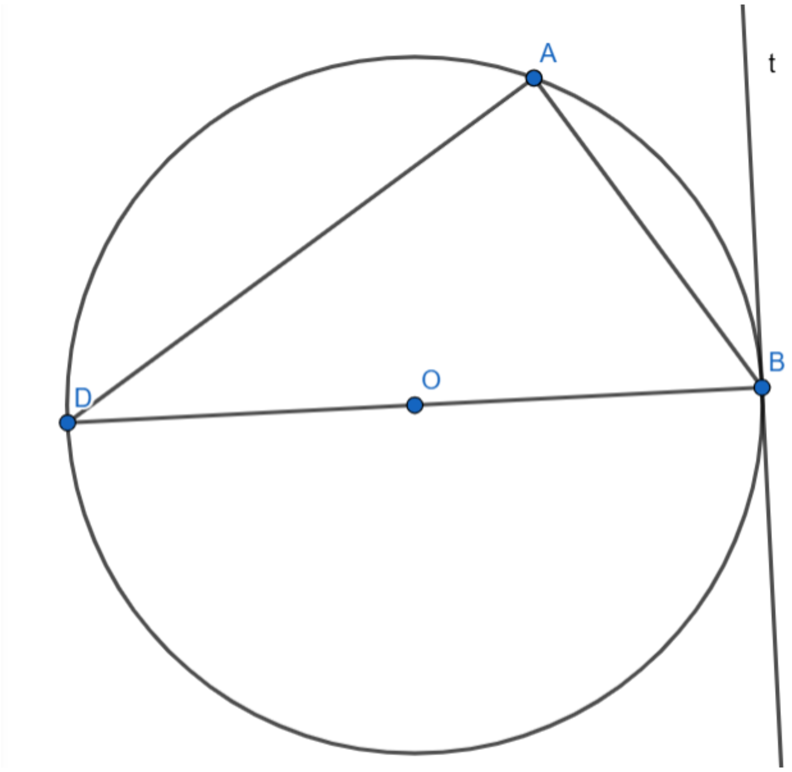
Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Četvrti tjedan

Zadatak 1. Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu k u točki B. Dokažite da je kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$ jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

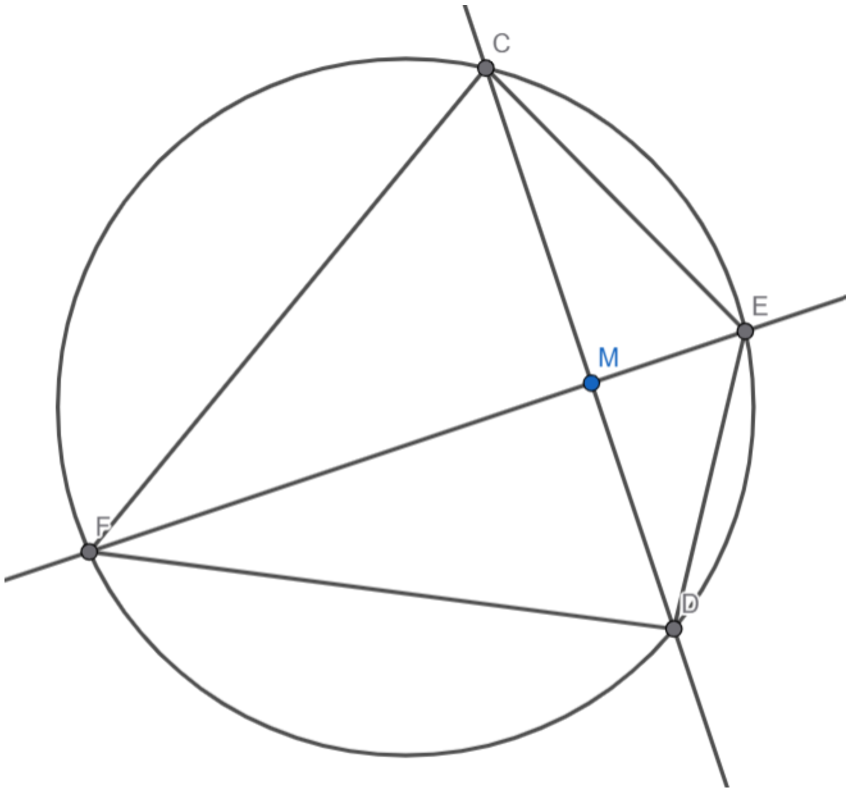
Rješenje. Obodni kut nad tetivom je isti koju god treću točku na kružnici izabrali (a da je s iste strane pravca AB kao i središte kružnice). Najpogodnije je onda uzeti točku D tako da je $\overline{BD}$ promjer.



Kako je promjer BD okomit na tangentu T, vrijedi da je kut između t i AB jednak $90° - \angle ABD$. Prema Talesovom poučku, $\angle ADB + \angle ABD = 90°$, i tvrdnja zadatka slijedi. $\square$

Zadatak 2. Zadane su kružnica k i točka M unutar nje. Ako se točkom M povuku dvije međusobno okomite tetive kružnice k, dokažite da je zbroj kvadrata duljina tih tetiva konstantan.

Rješenje. Neka su CD i EF okomite tetive kroz M.



Koristimo teorem o potenciji točke. Označimo s K vrijednost potencije točke M na kružnicu k. Tada je $|CM| \cdot |MD| = |EM| \cdot |MF| = K$, te taj izraz ne ovisi o izboru okomitih tetiva.

Izraz $|CD|^2 + |EF|^2$ možemo zapisati kao

$$(|CM|+|MD|)^2+(|EM|+|MF|)^2 = |CM|^2+|MD|^2+|EM|^2+|MF|^2+2|CM|\cdot|MD|+2|EM|\cdot|MF|.$$

Prema Pitagorinom poučku i spomenutom identitetu koji imamo iz potencije točke, to možemo zapisati kao

$$|CE|^2 + |DF|^2 + 4K.$$

Dakle, dovoljno je dokazati da zbroj kvadrata od $|CE|$ i $|DF|$ ne ovisi o izboru okomitih tetiva.

Primijetimo da je zbroj obodnih kuteva nad $|CE|$ i $|DF|$ jednak $90°$.

Sada možemo dovršiti na više načina: npr. primijetimo da je duljina tetive jedinstveno određena njenim obodnim kutom, pa možemo umjesto $|CE|$ gledati tetivu jednake duljine koja se nadovezuje na $|DF|$. Prema Talesovom poučku, zbroj kvadrata duljina tih tetiva je jednak kvadratu promjera.

Drugi način je da iskoristimo sinusov poučak: $|CE| = 2R \sin \alpha$, $|DF| = 2R \sin(90° - \alpha)$, gdje je α obodni kut nad $|CE|$. I sad samo iskoristimo da je $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$.

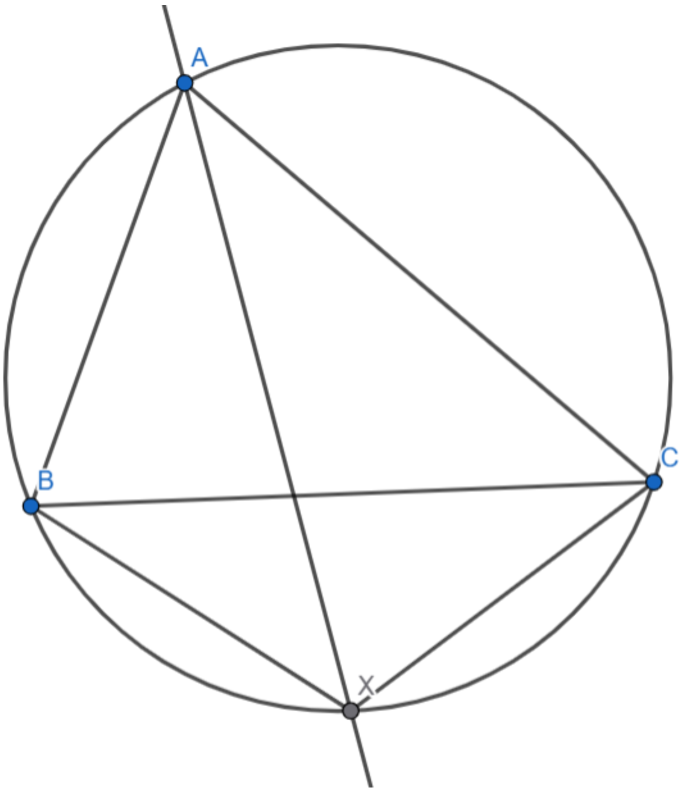
$\square$

Zadatak 3. Dokažite da se simetrala kuta i simetrala nasuprotne stranice trokuta sijeku u točki koja se nalazi na opisanoj kružnici tog trokuta.

Rješenje. Ponovno imamo zadatak gdje treba dokazati da se tri objekta sijeku u jednoj točki, pa trebamo izabrati dva od ta tri, i dokazati da se njihov presjek nalazi na trećem.

Označimo s X presjek simetrale kuta i opisane kružnice. Treba dokazati da je X na simetrali nasuprotne stranice.

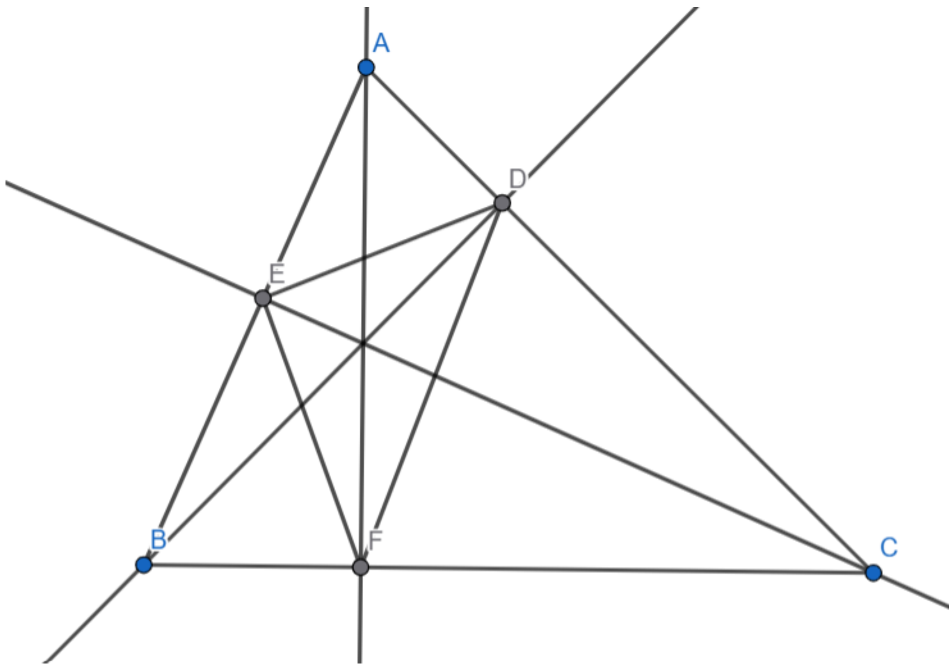
Uvedimo oznake kao na skici.



Dovoljno je dokazati $|BX| = |CX|$. Primijetimo da su obodni kutovi nad BX i CX jednaki, jer je $\angle CAX = \angle BAX$. Kako veličina obodnog kuta jedinstveno određuje duljinu tetive, slijedi $|BX| = |CX|$. $\square$

Zadatak 4. Dokažite da su visine trokuta ujedno i simetrale kutova njegovog nožišnog trokuta (trokuta kojem su vrhovi nožišta visina).

Rješenje. Označimo točke kao na slici.



Neka su α, β, γ kutovi trokuta ABC, te označimo s H ortocentar od ABC. Tada svaki kut na skici možemo izraziti preko α, β, γ.

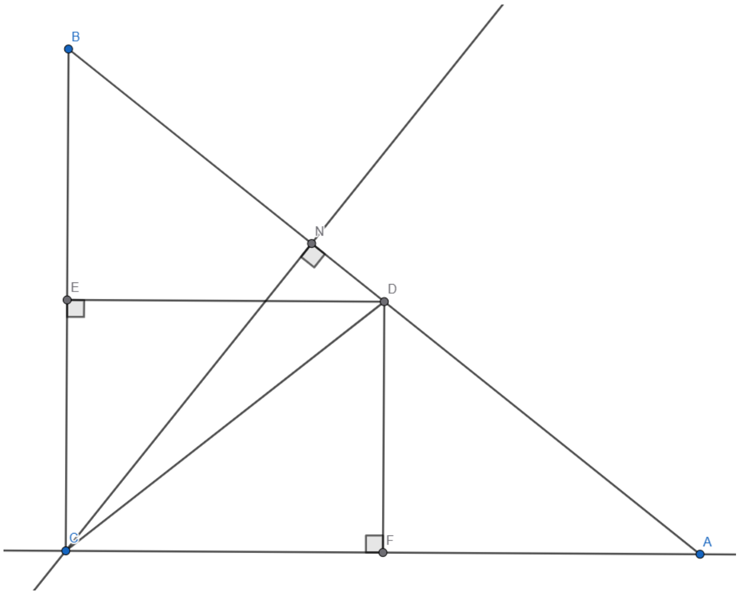
Glavna ideja je da su četverokuti $AEHD$, $BFHE$, $CDHF$ tetivni. To slijedi iz Talesovog teorema: $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$, pa A, E, H, D leže na kružnici s promjerom AH. Analogno se dokažu preostale tetivnosti.

Sada korištenjem teorema o obodnim kutovima vidimo $\angle HED = \angle HAD = \angle FAC = 90^\circ - \gamma$.

Analogno je $\angle HEF = \angle HBF = \angle DBC = 90^\circ - \gamma$. Slijedi da je EC simetrala od $\angle DEF$. Analogno se dokaže za ostale visine. □

Zadatak 5. Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutem pri vrhu C. Dokažite da su polovišta stranica, vrh C i nožište visine iz vrha Ckonciklične.

Rješenje. Označimo točke kao na skici.



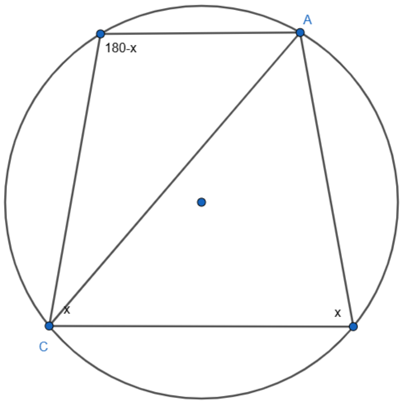
Kut $\angle CND$ je pravi po definiciji točke N kao nožišta visine. Kutovi $\angle CED$ i $\angle CFD$ su pravi jer su ED i DF srednjice u ABC, pa su paralelne sa stranicama.

Zaključujemo da E, F, N leže na kružnici s promjerom $\overline{CD}$.

□

Zadatak 6. Dokažite da je duljina visine trapeza kojemu se može upisati i opisati kružnica jednaka geometrijskoj sredini duljina njegovih osnovica.

Rješenje. Prvo dokažimo da je trapez kojem se može opisati kružnica nužno jednakokračan.

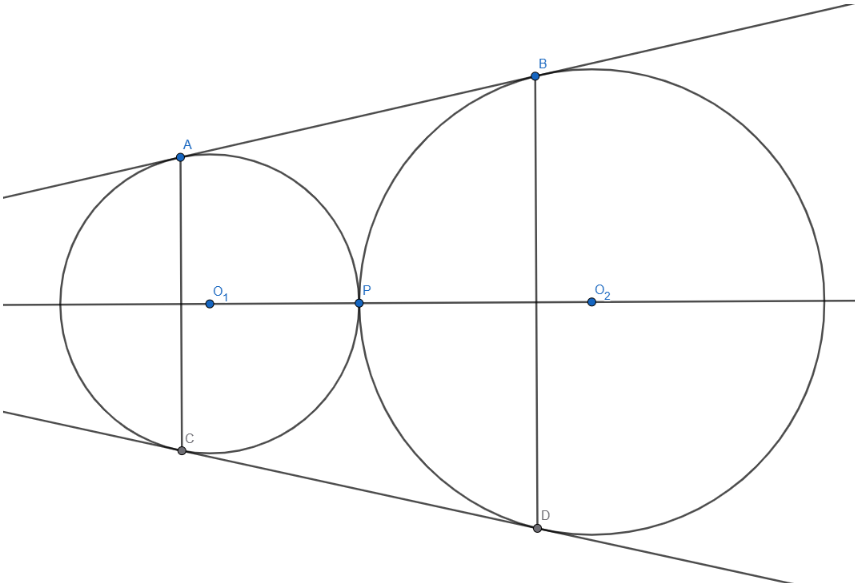


Označimo s x kut kod vrha C na skici. Tada je zbog paralelnosti osnovica kut nad tetivom AC jednak $180^\circ - x$, pa je kut nasuprot njega jednak x, iz čega slijedi da su kutovi uz istu osnovicu trapeza jednaki.

Označimo s b duljinu kraka trapeza, te s a i c duljine osnovica. Tada, pošto je trapez prema uvjetu zadatka tangencijalan, slijedi da je $a + c = 2b$, odnosno $b = \frac{a+c}{2}$. Kvadrat duljine visine je po Pitagorinom poučku jednak $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = ac$, što je točno ono što je trebalo dokazati. $\square$

Zadatak 7. Dvije kružnice polumjera r i R $(r < R)$ dodiruju se izvana. Njihove zajedničke tangente dodiruju ih redom u točkama A i B, odnosno C i D. Dokažite da se u četverokut $ABCD$ može upisati kružnica i odredite joj polumjer.

Rješenje.



Dokazat ćemo da je P središte upisane kružnice od $ABCD$. Dovoljno je dokazati da je $\angle CAP = \angle PAB$, za ostale kutove zaključimo analogno.

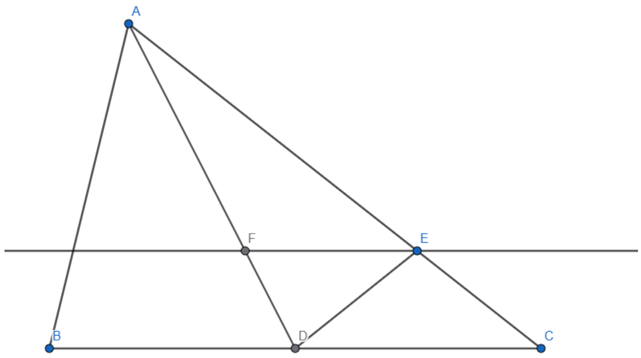
Primijetimo da je $\angle PAB$ kut između tetive i tangente, pa je po teoremu o tetivi i tangenti $\angle PAB = \angle PCA$. Međutim, kako su A i C u odnosu na pravac O_1O_2, slijedi $\angle PCA = \angle CAP$, pa je $\angle CAP = \angle PAB$, kao što je i trebalo dokazati.

Preostaje izračunati polumjer upisane kružnice u terminima r i R. To ostavljamo za vježbu (ideja je dodati presjek pravaca AB i CD i pomoću sličnosti i Pitagorinog poučka odrediti sve relevantne duljine).

$\square$

Zadatak 8. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$ i neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\measuredangle EDA = \measuredangle ABC$. Točkom E povučena je paralela s $\overline{BC}$ koja siječe $\overline{AD}$ u točki F. Dokažite da je $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$.

Rješenje.



Ideja je pronaći slične trokute. Označimo s β kut $\angle ABC$, s x kut $\angle BDA$ te s y kut $\angle BAD$. Tada je $\angle FDE = \beta$, $\angle DFE = x$, pa su trokuti ABD i EDF slični po KK poučku. Također se lako vidi da su trokuti ADC i AEF slični.

Iz prve sličnosti dobivamo

$$\frac{DF}{EF} = \frac{BD}{AD}.$$

Iz druge sličnosti dobivamo

$$\frac{CD}{AD} = \frac{EF}{AF}.$$

Kombiniranjem tih dvaju relacija i korištenjem $BD = CD$ slijedi

$$\frac{DF}{EF} = \frac{EF}{AF},$$

iz čega slijedi tvrdnja.

□